**Федеральное агентство связи**

**Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное**

**образовательное учреждение высшего образования**

**«Московский технический университет связи и информатики»**

**Семенова Т.И., Сосновиков Г.К.**

**Лабораторный практикум**

**по дисциплине**

**Численные методы**

**для дистанционного обучения студентов**

**по направлению подготовки**

**11.03.02 - Инфокоммуникационные технологии и системы связи**

**Москва 2020**

**Лабораторный практикум**

**по дисциплине**

**Численные методы**

Составители: Т.И. Семенова, к.т.н., доцент

Г.К. Сосновиков, к.т.н., доцент

Общие рекомендации по использованию   
лабораторного практикума

Содержание данного практикума соответствует стандарту подготовки специалистов по направлению 11.03.02 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и может быть использовано для студентов дневной, заочной и дистанционной форм обучения. Практикум включает 6 тем:

[***Тема 1. Методы решения нелинейных уравнений***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355350#_Toc57355350)

***Тема*** [***2***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355373#_Toc57355373)***. Интерполяция функций***

[***Тема 3. Численное интегрирование***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355391#_Toc57355391)

***Тема*** [***4. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355408#_Toc57355408)

***Тема*** [***5. Одномерная оптимизация***](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355423#_Toc57355423)

***Тема 6. Методы оптимизации функций нескольких переменных***

Изучение каждой темы следует начинать с теоретического материала [1]. Схемы алгоритмов изучаемых методов представлены в учебном пособии [2]. Используемые при выполнении лабораторных работ средства программирования и функции, предназначенные для решения аналогичных задач в пакете Scilab, подробно изложены в учебнике [3]. В конце каждой темы представлены контрольные вопросы, охватывающие весь материал изучаемой темы, которые позволяют осуществить контроль и самоконтроль знаний.

***Общее задание*** каждой лабораторной работы представляет собой перечень пунктов, которые необходимо выполнить при выполнении лабораторной работы по конкретной теме.

***Индивидуальное задание*** представлено в описании лабораторной работы в форме соответствующей таблице вариантов заданий. Номер индивидуального задания выбирается в соответствии с указанием преподавателя.

Лабораторные работы по всем темам имеют следующие обязательные этапы:

* подготовительная работа к расчетам (анализ функции, выбор начальных приближений, проверка условий сходимости и т.п.);
* расчет трех итераций заданными методами (с обязательным представлением расчетных формул и промежуточных результатов) с использованием средств математического пакета Scilab [3]; все сценарии должны содержать встроенные в них внутренние пользовательские функции;
* сведение полученных данных в соответствующие таблицы;
* при необходимости, геометрическая интерпретация полученных результатов;
* анализ и выводы по полученным результатам
* решение поставленной задачи с использованием соответствующих функций математического пакета Scilab.

Описание каждой лабораторной работы содержит примеры ее решения аналогичных задач с использованием всех изучаемых методов.

Отчет по лабораторной работе должен быть оформлен аккуратно и содержать все пункты выполнения задания. Титульный лист отчета должен содержать: название темы, номер варианта индивидуального задания, а также сведения о студенте, выполнившего задание и преподавателе, ведущем лабораторные работы.

### Лабораторная работа №1

### по теме *«Методы решения нелинейных уравнений»*

#### 1.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи численного решения нелинейных уравнений.
2. Этапы численного решения уравнения.
3. Аналитический и графический методы отделения корней.
4. Уточнение корня методами половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
5. Графическая иллюстрация методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
6. Условие окончания вычислений при использовании методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.
7. Сходимость метода итерации, выбор начального приближения, правило выбора итерирующей функции и оценка погрешности метода итерации.
8. Теорема о сходимости метода Ньютона и оценка погрешности метода.
9. Правило выбора неподвижной точки, начальной точки и условие сходимости метода хорд.
10. Условия окончания вычислений в методах итерации, Ньютона и хорд.
11. Сравнение методов половинного деления, итерации, Ньютона и хорд.

#### 1.2. Общее задание

1. **Выбрать индивидуальное задание из табл. 1-1:**

* нелинейное уравнение;
* методы решения нелинейного уравнения для выполнения 3-х итераций;

1. **Отделить корни заданного уравнения графическим и аналитическим методом** с использованием средств пакета Scilab**.**
2. **Для каждого из заданных методов провести исследование функции нелинейного уравнения**:

* проверить выполнение условий сходимости вычислительного процесса, в случае расходящегося процесса – сделать необходимые преобразования для обеспечения сходимости;
* выбрать начальное приближение к корню;
* сформулировать условие окончания этапа уточнения корня.

1. **Провести расчет трех итераций** с использованием средств пакета Scilab двумя заданными методами. Для каждого заданного метода в сценарии создать функцию, реализующую заданный метод. Произвести расчет, а результаты решений свести в таблицы
2. **Для каждого метода оценить погрешность** результата после 3-х итераций.
3. **Найти решение нелинейное уравнение** на отделенном отрезке с использованием функции **fsolve** пакетаScilab**.**

#### 1.3. Варианты задания

Таблица 1-1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Уравнение** | 1-й метод | 2-й метод | **№** | **Уравнение** | 1-й метод | 2-й метод |
| **1** | **x - cos(x / 3) = 0** | 1 | 4 | **16** | **sin(1 – 0.2x2) – x = 0** | 3 | **16** |
| **2** | **x + ln(4x) – 1 = 0** | 3 | 1 | **17** | **ex – e-x – 2 = 0** | 2 | **17** |
| **3** | **ex – 4 e-x – 1 = 0** | 2 | 4 | **18** | **x – sin(1 / x) = 0** | 4 | **18** |
| **4** | **x ex – 2 = 0** | 3 | 2 | **19** | **ex + ln(x) – x = 0** | 1 | **19** |
| **5** | **4 (x2 + 1) ln(x) – 1 = 0** | 1 | 3 | **20** | **1–x+sin(x)–ln(1+x) = 0** | 1 | **20** |
| **6** | **2 – x – sin(x / 4) = 0** | 4 | 1 | **21** | **(1–x)1/2–cos(1–x) = 0** | 4 | **21** |
| **7** | **x2 + ln(x) – 2 = 0** | 1 | 2 | **22** | **sin(x2)+cos(x2)–10x = 0** | 3 | **22** |
| **8** | **cos(x)–(x + 2)1/2 + 1 = 0** | 2 | 3 | **23** | **x2 – ln(1 + x) – 3 = 0** | 2 | **23** |
| **9** | **4 (1 + x1/2) ln(x) – 1 = 0** | 2 | 1 | **24** | **cos(x / 2) ln(x – 1) = 0** | 1 | **24** |
| **10** | **5 ln(x) – x1/2 = 0** | 2 | 3 | **25** | **cos(x/5) (1+x)1/2–x = 0** | 1 | **25** |
| **11** | **ex + x3 – 2 = 0** | 1 | 4 | **26** | **3x – e-x = 0** | 4 | **26** |
| **12** | **3 sin (x1/2) + x – 3 = 0** | 3 | 1 | **27** | **4(1+x1/2) ln(x)–10 = 0** | 1 | **27** |
| **13** | **0.1x2 – x ln(x) = 0** | 1 | 4 | **28** | **sin(x)–31/2cos(x)+4x–4 = 0** | 3 | **28** |
| **14** | **cos(1 + 0.2x2) – x = 0** | 1 | 3 | **29** | **x – 1 / (3 + sin(3.6x)) = 0** | 1 | **29** |
| **15** | **3 x – 4 ln(x) – 5 = 0** | 1 | 2 | **30** | **0.25x3 + cos(x / 4) = 0** | 4 | **30** |

В табл. 1-1 Номера методов: **1** – половинное деление;**2** – итерации;**3** – Ньютона; **4** – хорд.

#### 1.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание (уравнение, методы для выполнения 3-х итераций).
2. Результат отделения корней (график функции, таблица значений функции и её производных, сделать вывод об отделенном отрезке, содержащем один корень).
3. Результаты исследования функции уравнения для проведения расчетов. ***Привести для каждого метода***:

* условие сходимости вычислительного процесса;
* начальное приближение;
* **условие окончания этапа уточнения корня.**

1. В сценарии пакета Scilab создать функции для проведения расчета двумя заданными методами. Результаты расчета по каждому методу свести в табл. 1.-2.

Таблица 1-2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **к** | **x** | **f(x)** |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

1. Оценки погрешностей результатов расчетов после 3-х итераций с использованием формул, соответствующим заданным методам.
2. Решение нелинейного уравнения с использованием функции **fsolve**.

#### 1.5. Пример выполнения задания

**1. Задание для решения нелинейных уравнений:**

* уравнение ;
* 2 метода, с использованием которых требуется провести по 3 итерации для уточнению корня заданного уравнения. (***В примере рассматривается все 4 метода: метод половинного деления, метод итераций, метод Ньютона, метод хорд***).

1. **Отделение корней**

|  |
| --- |
| --> function s=fi(x)  > deff('y=f(x)','y=1-3.\*x+cos(x)'); dy=numderivative(f, x); dy2=numderivative(f, x,2);  > s=[x,f(x),dy,dy2];  > end  --> p=zeros(6,4); x=0 : 0.2 : 1;  --> for i=1:6  > p(i,:)=fi(x(i));  > end  --> p  p =  0. 2. -3. -3.  0.2 1.38 -3.199 -3.09  0.4 0.721 -3.389 -3.177  0.6 0.025 -3.565 -3.257  0.8 -0.703 -3.717 -3.326  1. -1.46 -3.841 -3.383 |

**Вывод:** На концах отрезка [0;1] функция имеет противоположные знаки, а 1-я производная знакопостоянна, следовательно, на этом отрезке уравнение 1 - 3х + cos(x)=0 имеет единственный корень.

***Метод половинного деления***

**1. Исследование задания**

Метод **половинного деления** сходится, если на выбранном отрезке отделен один корень. Так как на отрезке [0;1] функция меняет знак () и монотонна (f’(x)<0), то условие сходимости выполняется.

Начальным приближением является середина отрезка [0;1]:=0.5.

1. **Результаты расчет трех итераций.**

В сценарии пакета Scilab создать функцию, реализующую метод половинного деления, предусмотрев вывод данных, требуемый для заполнения следующей таблицы.

|  |
| --- |
| // Сценарий для проведения расчета 3-х итераций по методу половинного деления  function **ff**=f(**x**) //левая часть уравнения  **ff**=1-3\***x**+cos(**x**);  endfunction  // Расчет 3-х итераций по методу половинного деления  disp(' n a b f(a) f(b) c=(a+b)/2 f(c) b-a');  n=0; fa=f(a);fb=f(b);c=(a+b)/2; fc=f(c); z=[n,a,b,fa,fb,c,fc,b-a];  z  for n=1:3  if f(c)\*f(a)<0 then b=c; else a=c; end  fa=f(a);fb=f(b);c=(a+b)/2; fc=f(c); z=[n,a,b,fa,fb,c,fc,b-a];  z  c=(a+b)/2;  end  --> a=0;b=1;  --> exec('pol.sce',0);  n a b f(a) f(b) c=(a+b)/2 f(c) b-a  z =  0. 0. 1. 2. -1.4597 0.5 0.37758 0.5  z =  1. 0.5 1. 0.37758 -1.4597 0.75 -0.51831 0.25  z =  2. 0.5 0.75 0.37758 -0.51831 0.625 -0.06404 0.125  z =  3. 0.5 0.625 0.37758 -0.06404 0.5625 0.15842 0.0625 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **a** | **b** | **f(a)** | **f(b)** | **(a+b)/2** | **f( (a+b)/2)** | **b-a** |
| 0 | 0 | 1 | 2 | -1.459 | 0.5 | 0.377 | 0.5 |
| 1 | 0.5 | 1 | 0.377 | -1.459 | 0.75 | -0.518 | 0.25 |
| 2 | 0.5 | 0.75 | 0.377 | -0.518 | 0.625 | -0.064 | 0.125 |
| 3 | 0.5 | 0.625 | 0.377 | -0.064 | 0.563 | 0.158 | 0.063 |

После трех итераций приближение к корню x3=0.563.

1. **Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Оценим погрешность результата, полученного после 3-х итераций .

***Метод итераций***

**1. Исследование задания**

Приведем уравнение f(x)=0 к виду . Тогда рекуррентная формула . Для сходимости процесса итерации необходимо, чтобы  при **.** Если  то сходимость не обеспечена.

В случае, когда х выразить не удается, целесообразно воспользоваться следующим приемом, позволяющим обеспечить выполнение условий сходимости.

Построим функцию  где параметр  может быть определен по правилу: если то  если  то  где .

Приведем уравнение f(x)=0 к виду x = (cos(x)+1)/3 и выполним исследование.

|  |
| --- |
| --> x=0:0.2:0.6;  --> function s=ffi(x) // формирование строки таблицы  > deff('y=fi(x)','y=(1+cos(x))/3'); dfi=numderivative(fi, x);  > s=[x; dfi];  > end  --> p=zeros(4,2); x=0 : 0.2 : 0.6;  --> for i=1:4  > p(i,:)=ffi(x(i));  > end  --> p  p =  0. 0.  0.2 -0.066  0.4 -0.13  0.6 -0.188 |

**Вывод**: условие сходимости метода итераций выполняется, поскольку на всем отрезке [a;b] . Выберем например, начальное значение, x0=0 (в методе итераций x0– произвольное значение, принадлежащее отрезку [a;b]**),** и с использованием итерационной функции выполним три итерации.

**2. Расчет трех итераций.**

В сценарии пакета Scilab создать функцию, реализующую метод итераций, предусмотрев вывод данных, требуемый для заполнения следующей таблицы.

|  |
| --- |
| function **ff**=f(**x**) //левая часть уравнения  **ff**=1-3\***x**+cos(**x**);  endfunction  function **ff**=fi(**x**) //итерирующая функция  **ff**=(cos(**x**)+1)/3;  endfunction  *// Расчет 3-х итераций по методу итераций*  disp(' n x f(x)')  n=0; x=0; fx=f(x); z=[n,x,fx];  z  for n=1:3  x=fi(x); fx=f(x); z=[n,x,fx]  end  --> x=0;  --> exec('iter.sce',0);  n x f(x)  z =  0. 0. 2.  z =  1. 0.66667 -0.21411  z =  2. 0.5953 0.0421  z =  3. 0.60933 -0.00795 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **n** | **Xn** | **f(xn)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.6667 | -0.2141 |
| 2 | 0.5953 | 4.21 • 10-2 |
| 3 | 0.6093 | -7.9496• 10-3 |

**3. Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Погрешность результата, вычисленного методом итерации, можно оценить с помощью

выражения (q==0.188):

0.0032

***Метод Ньютона***

**1*.* Исследование задания для «ручного расчета»**

Из условия для уравнения 1- 3х + cos(x) = 0, где , а  выберем начальное приближение к корню: .

Для получения решения уравнения методом Ньютона воспользуемся следующей рекуррентной формулой: 

В нашем случае 

1. **Расчет трех итераций**

В сценарии пакета Scilab создать функцию, реализующую метод итераций, предусмотрев вывод данных, требуемый для заполнения следующей таблицы.

|  |
| --- |
| function **ff**=f(**x**) *//левая часть уравнения*  **ff**=1-3\***x**+cos(**x**);  endfunction  function **ff**=f1(**x**) *//первая производная от f(x)*  **ff**=-3-sin(**x**);  endfunction  *// Расчет 3-х итераций по методу итераций*  disp(' n x f(x)')  n=0; x=0; fx=f(x); z=[n,x,fx];  z  for n=1:3  x=x-f(x)/f1(x); fx=f(x); z=[n,x,fx]  end  --> x=0;  --> exec('nuton.sce',0);  n x f(x)  z =  0. 0. 2.  z =  1. 0.66667 -0.21411  z =  2. 0.60749 -0.0014  z =  3. 0.6071 -6.3D-08 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **k** | **Xk** | **f(xk)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.62001 | -0.21411 |
| 2 | 0.60712 | -0. 0014 |
| 3 | 0.60710 | -6.3 •10-8 |

1. **Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Оценим погрешность после трех итераций по формуле:

 , где 

***Метод хорд***

**1. Исследование задания**

***Проверка выполнения условий сходимости***. Для сходимости метода необходимо знакопостоянство  на отрезке [a;b].

***Выбор начального приближения.*** Вид рекуррентной формулы зависит от того, какая из точек a или b является неподвижной. Неподвижен тот конец отрезка [a;b**]** , для которого знак функции f(x**)**совпадает со знаком ее второй производной. Тогда второй конец отрезка можно принять за начальное приближение к корню, то есть точку х0**.**

Рекуррентная формула метода хорд в [1]:

 где  - неподвижная точка.

Выше было показано, что для функции f(x)=1–3x+cosx <0 на отрезке [0;1]неподвижной точкой является точка x=b=1, так как f(1)>0.

Таким образом, полагая **x0=a=0**, получим сходящуюся последовательность приближений к корню.

В рассматриваемой задаче рекуррентная формула принимает следующий вид



**2. Расчет трех итераций**

Для получения решения уравнения методом хорд воспользуемся следующей рекуррентной формулой:

****

В сценарии пакета Scilab создать функцию, реализующую метод итераций, предусмотрев вывод данных, требуемый для заполнения следующей таблицы.

|  |
| --- |
| function **ff**=f(**x**) *//Левая часть уравнения*  **ff**=1-3\***x**+cos(**x**);  endfunction  *// Расчет 3-х итераций по методу итераций*  disp(' n x f(x)')  n=0; x=0; fx=f(x); z=[n,x,fx];  z  for n=1:3  x=x-f(x)/(f(xx)-f(x))\*(xx-x); fx=f(x); z=[n,x,fx]  end  --> xx=1;  --> exec('xord.sce',0);  n x f(x)  z =  0. 0. 2.  z =  1. 0.57809 0.10325  z =  2. 0.60596 0.00408  z =  3. 0.60706 0.00016 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **n** | **Xn** | **f(xn)** |
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 0.5781 | 0.10325 |
| 2 | 0.6441 | 0.00408 |
| 3 | 0.6070 | 0.00016 |

1. **Погрешность численного решения нелинейных уравнений**

Оценим погрешность после трех итераций по формуле:

1. **Решение нелинейного уравнения с использованием средств пакета Scilab**

|  |
| --- |
| --> deff('y=f(x)','y=1-3\*x+cos(x)');  --> [x,fx]=fsolve(0,f)  fx =  1.110D-16  x =  0.6071016 |

### Контрольные вопросы  по теме

### «Методы решения нелинейных уравнений»

**1.** Что является корнем нелинейного уравнения f(x)=0?

**2.** Чему равна функция в точке корня?

**3.** Каково условие существования на отрезке [a;b] хотя бы одного корня?

**4.** При каких условиях корень x будет единственным  на отрезке [a;b]?

**5.** Из каких этапов состоит процесс решения нелинейного уравнения?

**6.**В чем заключается этап «отделения корней» нелинейного уравнения?

**7.** Какие методы используются на этапе отделения корней?

**8.**Что необходимо, чтобы выбрать **x0** в качестве начального приближения в методе

Ньютона?

**9.**Какой метод решения нелинейного уравнения требует  более близкого к корню

начального значения?

**10.** Какой методпредставляет собой метод решения нелинейного уравнения, в результате которого получается последовательность вложенных отрезков?

**11.** Можно ли уточнить корень уравнения графическим методом?

**12.**Что является  первым приближением к корню, отделенному на отрезке [a;b],при

решении нелинейного уравнения методом половинного деления?

**13.** Каково правило выбора итерирующей функции при использовании метода итераций?

**14.** Что принимается за начальное приближение в методе итерации?

**15.** Каково правило выбора неподвижной точки при использовании метода хорд?

**16.** Какое значение выбирается в качестве начального приближения в методе хорд?

**17.** Для каких функций не рекомендуется применять метод Ньютона?

**18.**Можно ли применять метод итераций, если на заданном отрезке имеются два корня?

**19.** Какой метод решения нелинейного уравнения обладает свойством «самокоррекции»?

**20.** Что относится к способам улучшения сходимости метода простой итерации?

### Лабораторная работа №2

### по теме *«Интерполяция функций»*

#### 1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задач аппроксимации и интерполяции.
2. Основные понятия: интерполирующая и интерполируемая функции, условие интерполяции. Связь между числом узлов интерполяции и порядком интерполирующего многочлена.
3. Условие единственности решения задачи интерполирования.
4. Интерполяционный многочлен Лагранжа: назначение, область применения.
5. Методика выбора узлов интерполяции при использовании формул Лагранжа и Ньютона.
6. Способы оценки погрешностей интерполяции по формулам Лагранжа и Ньютона. Способы повышения точности интерполяции.
7. Интерполяционная формула Ньютона, область применения.
8. Конечные разности, их назначение и использование. Свойства конечных разностей.
9. Правило выбора начальных узлов интерполяции для формул Ньютона.
10. Практическое правило определения степени интерполяционного многочлена.
11. Сравнение интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона.
12. Погрешность интерполяции.

#### 2. Задание

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл.2-1 и табл. 2-2 для решения задач интерполяции:

* из табл. 2-1 выбираем значения **x=a** (для построения многочлена Ньютона) и **x=b** (для построения многочлена Лагранжа)**;**
* **t –** номер который указывает какой интерполяционный полином 2-го порядка надо получить в явном виде: **t=1** – полином Ньютона, **t=2** – полином Лагранжа.
* из табл. 2-2 в соответствии с методикой выбора узлов интерполяции по значению **x=a** выбираем узлы интерполяции (из отрезка **[0.05;1.55]** – область задания интерполируемой функции) и значения функции в этих узлах. Число узлов определяется заданной степенью интерполяционного многочлена в соответствии с п.**2** и п.**3**.

***Следует обратить внимание***, что при выполнении п.2 (метод Ньютона) для выбора узлов и определения формулы следует руководствоваться следующим правилом:

* + если точка **x=a** расположена ближе к левому концу отрезка таблица, то для построения первой формулы Ньютона необходимо выбрать узлы  ( - узел ближайший слева к точке **x=a**);
  + если точка **x=a** расположена ближе к правому концу отрезка, то используют вторую формулу Ньютона и необходимо выбрать узлы  (**xn** – узел ближайший справа к точке **x=a**);
  + если точка **x=a** расположена примерно в середине таблицы, то следует выбрать ту формулу, которая обеспечит меньшую погрешность.

1. **Выполнить линейную, квадратичную и кубическую интерполяцию** функции , заданной таблично (табл.2-2), с использованием многочлена Ньютона:

* вычислить значение интерполирующего многочлена в точке ; для многочлена Лагранжа в точке ;
* провести оценку погрешности интерполяции по формулам практической оценки погрешности.

1. **Выполнить линейную, квадратичную и кубическую интерполяцию** функции , заданной таблично (табл.2-2), с использованием многочлена Лагранжа:

* вычислить значение интерполирующего многочлена Лагранжа в точке ;
* провести оценку погрешности интерполяции по формулам практической оценки погрешности.

1. В соответствии со значением номера **t получить интерполяционный полином в явном виде** (**t=1** – полином Ньютона, **t=2** – полином Лагранжа)
2. **Решить задачу интерполяции функции** **, заданной таблично с использованием средств пакета Scilab. Вычислить значения функции в точках a** и **b**, используя те же значения таблицы, что и при п.1-2**. Сравнить полученные результаты** с результатами, полученными ручным расчетом.

#### 3. Варианты задания

Таблица 2-1

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ вар** | **Вид интерполяционного многочлена** | | |  |
| **Многочлен**  **Ньютона** | **Многочлен Лагранжа** | | Получить в явном виде |
| **x=a** | **x=b** | **Номера узлов** |
| **1** | 0.17 | 0.43 | 4,6,7,9,11,12 | 1 |
| **2** | 1.02 | 0.72 | 10,11,12,14,16,17 | 2 |
| **3** | 0.34 | 1.17 | 19,20,22,23,24,26 | 1 |
| **4** | 1.41 | 0.58 | 7,8,10,11,13,15 | 2 |
| **5** | 0.23 | 0.12 | 0,1,3,5,,6,7 | 1 |
| **6** | 0.67 | 1.21 | 21,23,24,26,27,28 | 2 |
| **7** | 1.29 | 1.46 | 24,25,26,28,29,30 | 1 |
| **8** | 0.81 | 0.87 | 13,15,16,18,20,21 | 2 |
| **9** | 0.06 | 0.48 | 6,8,9,10,12,14 | 1 |
| **10** | 1.12 | 1.37 | 23,24,26,28,29,30 | 2 |
| **11** | 0.93 | 0.51 | 6,8,9,10,13,14 | 1 |
| **12** | 0.37 | 0.96 | 16,18,19,20,22,23 | 2 |
| **13** | 0.26 | 0.64 | 8,9,11,12,14,15 | 1 |
| **14** | 1.07 | 1.52 | 24,25,27,28,29,30 | 2 |
| **15** | 1.33 | 0.77 | 10,12,13,14,16,17 | 1 |
| **16** | 0.43 | 0.17 | 0,1,2,4,6,7 | 2 |
| **17** | 0.72 | 1.02 | 16,18,19,21,22,24 | 1 |
| **18** | 1.17 | 0.34 | 2,4,5,6,8,9 | 2 |
| **19** | 0.58 | 1.41 | 23,24,26,27,29,30 | 1 |
| **20** | 0.12 | 0.23 | 0,2,3,5,6,7 | 2 |
| **21** | 1.21 | 0.67 | 10,11,12,14,16,17 | 1 |
| **22** | 0.87 | 1.29 | 22,24,25,27,28,29 | 2 |
| **23** | 0.48 | 0.81 | 12,14,15,17,18,19 | 1 |
| **24** | 1.37 | 1.26 | 21,23,24,26,27,29 | 2 |
| **25** | 0.51 | 1.12 | 18,19,21,22,24,26 | 1 |
| **26** | 0.96 | 0.93 | 15,17,18,19,21,22 | 2 |
| **27** | 0.64 | 0.37 | 3,5,6,8,9,11 | 1 |
| **28** | 0.77 | 0.26 | 2,4,5,7,8,9 | 2 |
| **29** | 0.08 | 1.07 | 17,18,20,21,23,24 | 1 |
| **30** | 1.31 | 1.33 | 21,22,24,26,27,28 | 2 |

Таблица 2-2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ узла** | **Значение аргумента** | **Значение функции** |
| 0 | 0.05 | -4.171 |
| 1 | 0.1 | -4.133 |
| 2 | 0.15 | -4.0845 |
| 3 | 0.2 | -4.024 |
| 4 | 0.25 | -3.95 |
| 5 | 0.3 | -3.861 |
| 6 | 0.35 | -3.7555 |
| 7 | 0.4 | -3.632 |
| 8 | 0.45 | -3.489 |
| 9 | 0.5 | -3.325 |
| 10 | 0.55 | -3.1385 |
| 11 | 0.6 | -2.928 |
| 12 | 0.65 | -2.692 |
| 13 | 0.7 | -2.429 |
| 14 | 0.75 | -2.1375 |
| 15 | 0.8 | -1.816 |
| 16 | 0.85 | -1.463 |
| 17 | 0.9 | -1.077 |
| 18 | 0.95 | -0.6565 |
| 19 | 1 | -0.2 |
| 20 | 1.05 | 0.294 |
| 21 | 1.1 | 0.827 |
| 22 | 1.15 | 1.4005 |
| 23 | 1.2 | 2.016 |
| 24 | 1.25 | 2.675 |
| 25 | 1.3 | 3.379 |
| 26 | 1.35 | 4.1295 |
| 27 | 1.4 | 4.928 |
| 28 | 1.45 | 5.776 |
| 29 | 1.5 | 6.675 |
| 30 | 1.55 | 7.6265 |

Пример, выбора значений функции по номеру варианта (№10):

1. Для выполнения интерполяции с использованием многочлена Лагранжа следует выбрать из этой же строки номера узлов (**23, 24, 26, 28, 29, 30**), которым соответствуют значения аргумента и функции в табл. 2-2, и точку **x=b** (**b=1.37**), в которой нужно вычислить значение многочлена.
2. Для выполнения интерполяции с использованием многочлена Ньютона выбрать из табл.2-2 узлы интерполяции в соответствии со значением **x=a**  (a**=1.12**).
3. **Содержание отчета**
4. Индивидуальное задание.

Для многочленов Ньютона и многочлена Лагранжа указать последовательность выбранных узлов из предложенного диапазона  для первой формулы Ньютона,  - для второй формулы Ньютона,  - для формулы Лагранжа.

1. Ручной расчет по
2. Линейная, квадратичная и кубическая интерполяция функции , заданной таблично (табл. 2-2), методами Ньютона и Лагранжа:

* значения интерполирующего многочлена Ньютона в точке ; для многочлена Лагранжа в точке  (табл. 1.3-3);
* значения погрешностей интерполяции по формулам практической оценки погрешности, результат которых необходимо записать в табл. 3-3.

Таблица 2-3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Число узлов n+1** |  |  | **Оценки погрешностей** | |
| **Метод Ньютона** | **Метод Лагранжа** |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |

1. Интерполяционный многочлен второй степени (Ньютона ***или*** Лагранжа в зависимости от значения **t**) в явном виде и значения построенного многочлена во всех выбранных узлах интерполяции, которые необходимо записать в табл. 3-4; сравнить полученные результаты с таблично заданными значениями.

Таблица 3-4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xi |  |  |  |
| P2(xi) или L2(xi) |  |  |  |
| y=f(xi) |  |  |  |

#### 5. Пример выполнения задания

1. **Задание для интерполяции функций**

функция y=f(x), заданная таблично значениями в узлах интерполяции:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ узла-i** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **xi** | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 | 0.75 |
| **y=f(xi)** | 0.8881 | 1.0265 | 1.1752 | 1.3366 | 1.5095 | 1.6963 |

* вычислим значение многочлена Ньютона в точке **x=a=0.57** и значение многочлена Лагранжа в точке **x=b= 0.62**:
* для вычисления значения интерполирующей функции в точке **x=a=0.57** методом Ньютона выберем узлы интерполяции **х0=0.55**, **х1=0.60**, **х2=0.65**, **х3=0.70** (**x0=0.55**– ближайший к точке**х=а=0.57**узел слева**)**;
* для вычисления значения интерполирующей функции в точке **x=b=0.62** методом Лагранжа выберем номера узлов интерполяции 1, 2, 3, 4, что соответствует значениям узлов **х0=0.55**, **х1=0.60**, **х2=0.65, х3=0.70** (из указанного диапазона узлов).

1. **Линейная, квадратичная и кубическая интерполяция методом Ньютона**

Для построения интерполяционного многочлена Ньютона воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона, так как точка интерполяции **a** =**0.57** находится в начале таблицы значений выбранных узлов интерполяции (отрезок **[0.50;0.75]**).

Ближайший к точке **а** узел слева **х=0.55**, поэтому полагаем .

Для линейной интерполяции следует взять узлы и .

Для квадратичной и кубической интерполяции выберем соответственно следующие последовательности узлов:

, ; ;

, ,  , 

(число узлов равно **n+1**, где **n** – порядок многочлена).

Для выбранной последовательности узлов:

**•** построить таблицу конечных разностей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **y** |  |  |  |  |
| 0.55 | 1.0265 | 0.1487 | 0.0127 | -0.0012 | 0.0036 |
| 0.60 | 1.1752 | 0.1614 | 0.0115 | 0.0024 |  |
| 0.65 | 1.3366 | 0.1729 | 0.0139 |  |  |
| 0.70 | 1.5095 | 0.1868 |  |  |  |
| 0.75 | 1.6963 |  |  |  |  |

**•** вычислить значение интерполирующего многочлена Ньютона в точке **a=0.57,**

воспользовавшись формулой при 

Значение интерполирующего многочлена Ньютона при **n+1=2** (линейная интерполяция):



.

Аналогично вычисляются значения

• при **n+1=3** (квадратичная интерполяция): **Р2(0.57)=1.08446 ,**

• при **n+1=4** (кубическая интерполяция): **Р3(0.57)=1.08438.**

В случае, если точка интерполяции находится в конце таблицы, на которой задана функция **y=f(x)**, интерполирование проводится по второй интерполяционной формуле Ньютона при , **xn** – ближайший к точке **х** узел справа.

Например, если задана точка интерполяции **а=0.73**, то для линейной интерполяции в этом случае следует взять узлы:**xn=0.75, xn-1=0.70,**для квадратичной – узлы: **xn=0.75, xn-1=0.70, xn-2=0.65**, для кубической - **xn=0.75, xn-1=0.70, xn-2=0.65, xn=3=0.60.**

Тогда 

Если точка интерполяции находится в середине таблицы, то выбор интерполяционной формулы Ньютона производится исходя из значения величины **q**. Например, если **x=a=0.58**, то для построения квадратичного полинома (**n+1=3**) лучше выбрать узлы **xn=0.60, xn-1=0.55, xn-2=0.50,** так как при этом величина **q** будет меньше(**q=-0.4**). (Для сравнения: если выбрать узлы **x0=0.55**, **x1=0.60, x2=0.65**, то **q=0.6**).

1. **Линейная, квадратичная и кубическая интерполяция методом Лагранжа**

Для построения интерполяционного многочлена Лагранжа воспользуемся формулой  


Для обеспечения большей точности интерполяции перенумеруем узлы интерполяции: выберем узел  (ближайший к точке **b=0.62**), далее выбираем узлы по возможности симметрично относительно точки интерполяции **b=0.62**:



Вычислим значение интерполирующего многочлена Лагранжа в точке **b=0.62**.

При **n+1=1** (линейная интерполяция) значение интерполирующего полинома будет следующим:





Проведя аналогичные вычисления, получим значения интерполирующего полинома:

* при **n+1=2** (квадратичная интерполяция) по формуле

 **-**

* при **n+1=3**(кубическая интерполяция) - 

1. **Оценка погрешности**

***Метод Ньютона.*** Вычислим погрешность интерполяции по формулам практической оценки погрешности.

Погрешность первой формулы Ньютона оценим по формуле.



Для линейной интерполяции:.

Для квадратичной интерполяции: .

Для кубической интерполяции: .

***Метод******Лагранжа*** Анализируя полученные значения погрешностей, можно сделать вывод, что интерполируемая функция близка к квадратичной, так как конечные разности третьего порядка значительно различаются, а 

Оценку погрешности многочлена Лагранжа произведем по формуле:

.

**, , ,** где  **b=0.62.**

Исходными данными для программной реализации являются таблично заданная функция **y=f(x)** и значения **x=a**или**x=b**. (Заметим, что при составлении программы алгоритма следует предусмотреть вывод значений конечных разностей).

1. **Результаты интерполяции и оценки погрешности**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Число**  **Узлов**  **n+1** |  |  | **Оценка погрешности** | |
| **Метод Ньютона** | **Метод Лагранжа**  **||** |
| 2 | 1.08598 | 1.23976 | 1.52•10-3 | 1.52•10-3 |
| 3 | 1.08445 | 1.23824 | 7.68•10-5 | 6.72•10-5 |
| 4 | 1.08438 | 1.23830 | 1.5•10-4 | 8.0•10-5 |

**6. Построение интерполяционных многочленов второй степени в явном виде**

Построенные квадратичные интерполяционные полиномы Ньютона (для выбранных узлов) и Лагранжа (для выбранных узлов) имеют вид:

**P2(x)= 2.54 x2 + 0.053x + 0.229,**

**L2(x) = 2.54 x2 + 0.053x + 0.229.**

Выражения для полиномов совпали, т.к. для построения обоих многочленов были

выбраны одинаковые узлы.

Вычислим значения построенного многочлена в выбранных узлах интерполяции и

занесем в табл.1.3-4 и для сравнения туда же занесем таблично заданные значения

исходной функции:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 |
| P2(xi) | 1.0265 | 1.1752 | 1.3366 | 1.5107 |
| L2(xi) | 1.0265 | 1.1752 | 1.3366 | 1.5107 |
| y=f(xi) | 1.0265 | 1.1752 | 1.3366 | 1.5095 |

**6. Решение задачи интерполяции с использованием средств пакета Scilab**

|  |
| --- |
| --> // Линейная ИП  --> x=[0.6 0.65]; y=[1.1752 1.3366]; z=[x;y]; a=[0;0];  --> function [zr]=R(a,z)  > zr=z(2)-a(1)-a(2)\*z(1)  > endfunction  --> a=datafit(R,z,a)  a =  -0.7616015  3.2280023  --> deff('y=i1(x)','y=-0.7616015+3.228023\*x');  --> i1(0.62)  ans =  **1.2397728**  --> // Квадратичная ИП  --> x=[0.6 0.65 0.7]; y=[1.1752 1.3366 1.5095]; z=[x;y]; a=[0;0;0];  --> function [zr2]=R(a,z)  > zr2=z(2)-a(1)-a(2)\*z(1)-a(3)\*z(1)^2  > endfunction  --> a=datafit(R,z,a)  a =  0.135281  0.3533667  2.2997187  --> deff('y=i2(x)','y=0.135281+0.3533667\*x+2.2997187\*x^2');  --> i2(0.62)  ans =  **1.2383802**  --> // Кубическая ИП  --> x=[0.6 0.65 0.7 0.75]; y=[1.1752 1.3366 1.5095 1.6963]; z=[x;y]; a=[0;0;0;0];  --> function [zr3]=R(a,z)  > zr3=z(2)-a(1)-a(2)\*z(1)-a(3)\*z(1)^2-a(4)\*z(1)^3  > endfunction  --> a=datafit(R,z,a)  a =  -0.7419418  4.4177165  -3.9648003  3.2122189  --> deff('y=i3(x)','y=-0.7419418+4.4177165\*x-3.9648003\*x^2+3.2122189\*x^3');  --> i3(0.62)  ans =  **1.2385349** |

#### Контрольные вопросы по теме

### *«Интерполяция функций»*

1. Что называется задачей интерполяции и задачей аппроксимации?
2. Что называется узлами и шагом интерполяции?
3. Что такое интерполируемая функция и интерполирующая функция?
4. Существует ли связь между числом узлов интерполяции и степенью интерполяционного многочлена?
5. Можно ли, используя одни и те же узлы интерполяции, построить несколько интерполяционных полиномов?
6. Сколько интерполяционных полиномов степени n существует, если функция задана (n + 1**)** узлом?
7. Изменится ли точность интерполяции при увеличении или уменьшении количества узлов?
8. Как изменится формула Лагранжа при добавлении в таблицу значений функции еще одного узла?
9. Как изменится формула Ньютона при добавлении в таблицу значений функции еще одного узла?
10. Если интерполируемая функция f(x)задана в (n + 1**)** равноотстоящих узлах, то для ее интерполяции удобнее использовать формулу Ньютона или формулу Лагранжа?
11. Можно ли при использовании формулы Лагранжа располагать узлы интерполяции в произвольном порядке?
12. Можно ли при использовании формулы Ньютона располагать узлы интерполяции в произвольном порядке?
13. Потребуется ли полный пересчет коэффициентов формулы Лагранжа при добавлении дополнительного узла интерполяции?
14. В чем заключается универсальность формулы Лагранжа?
15. От чего зависит точность интерполяции?
16. Что такое «конечные разности»?
17. Чему равен порядок конечной разности наивысшего порядка, полученный по n исходным точкам?
18. Что происходит с формулой Ньютона при добавлении очередного узла интерполяции?
19. Чем отличаются результаты интерполяции, если при построении интерполяционных полиномов по формулам Лагранжа и Ньютона были использованы одни и те же узлы?
20. Чему равна степень интерполяционного полинома Ньютона при трех заданных точках интерполируемой функции?

### Лабораторная работа по теме №3 *«Численное интегрирование»*

#### 3.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи численного интегрирования.
2. Методы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
3. Оценка погрешности численного интегрирования. Правило Рунге.
4. Графическая иллюстрация методов прямоугольников, трапеций и Симпсона.

#### 3.2. Задание

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл.3-1 для численного интегрирования:

* **f(x)** – подынтегральную функцию;
* **a, b**– пределы интегрирования;
* методы интегрирования для выполнения п.**2** – значение в столбце **t** и **m**;
* начальный шаг интегрирования **h0.**

При этом значения в столбцах t и m означают: 1 –интегрирование методом средних прямоугольников, 2 – методом трапеций, 3 – методом Симпсона.

1. В сценарии пакета Scilab создать функции для проведения расчета двумя заданными методами интегралов, определяемыми значениями столбцов **m** и **t** из табл. 4-1, с шагом  и  ( и )
2. Провести **оценку погрешностей полученных результатов** по правилу **Рунге**.
3. Вычислить заданный интеграл с использованием функции intg пакета Scilab.

#### 3.3. Варианты задания

Таблица 3-1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Подынтегральная функция** | **a** | **b** | **t** | **m** |  |
| **1** | **f(x) = 8 e-x sin(-2x)** | 2 | 3 | 1 | 3 | 0.25 |
| **2** | **f(x) = e-x sin(2x)** | 0 | 2 | 2 | 1 | 0.5 |
| **3** | **f(x) = x3/2 – 2 x sin(x)** | 3 | 4 | 3 | 2 | 0.25 |
| **4** | **f(x) = e-xcos(-2x)** | 2 | 4 | 1 | 3 | 0.5 |
| **5** | **f(x) = cos(2x) + 2 sin(x)** | 1 | 3 | 2 | 1 | 0.5 |
| **6** | **f(x) = 8 sin(2x) – x** | 0.2 | 1.2 | 3 | 2 | 0.25 |
| **7** | **f(x) = 5 cos(-2x) e-x** | -0.5 | 0.5 | 2 | 3 | 0.25 |
| **8** | **f(x) = x sin(x + 1) – cos(x – 5)** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0.25 |
| **9** | **f(x) = 0,25 x3 + cos(x/4)** | 1 | 3 | 1 | 3 | 0,5 |
| **10** | **f(x) = sin(2x) – 2 sin(x)** | 3.5 | 5 | 1 | 3 | 0.5 |
| **11** | **f(x) = sin(ex) – e-x +1** | 0 | 1 | 2 | 1 | 0.25 |
| **12** | **f(x) = 5 x sin(x + 1) + 2 cos(x)** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0.25 |
| **13** | **f(x) = 5 e-x + 4 x + x3/3** | -1 | 1 | 1 | 2 | 0.5 |
| **14** | **f(x) = -2 sin(4x) ln(-x) + 5** | -2.5 | -1.5 | 1 | 3 | 0.25 |
| **15** | **f(x) = sin(x – 1) – x cos(x + 3)** | -4 | -2 | 3 | 1 | 0.5 |
| **16** | **f(x) = 4 sin (x) – x1/2** | 1 | 2 | 2 | 3 | 0.25 |
| **17** | **f(x) = 5 sin3(x) + cos3(x)** | 1 | 2 | 2 | 1 | 0.25 |
| **18** | **f(x) = cos(2x + 1) ln (2 / x) + 3** | 1 | 3 | 3 | 2 | 0.5 |
| **19** | **f(x) = 3 cos(x2) / ln(x + 5)** | -1 | 1 | 1 | 3 | 0.5 |
| **20** | **f(x) = sin(x2) + 1 / (2 – x)** | -1.5 | 0.5 | 2 | 1 | 0.5 |
| **21** | **f(x) = x sin(x) + cos(x) + 5** | 0 | 2 | 1 | 2 | 0.5 |
| **22** | **f(x) = – cos(x) – cos(2x) – x + 5** | 1 | 3 | 3 | 1 | 0.5 |
| **23** | **f(x) = 1 + sin(4x) / ln(x)** | 1.5 | 2.5 | 1 | 3 | 0.25 |
| **24** | **f(x) = (1 + x2)1/2 + e-x** | -1 | 2 | 2 | 1 | 0.75 |
| **25** | **f(x) = sin(x + 1) e2 / x** | 1 | 2 | 3 | 2 | 0.25 |
| **26** | **f(x) = 2 (1 + x) e-x – 2 cos(x)** | 1 | 4 | 2 | 3 | 0.75 |
| **27** | **f(x) = – 8 sin(– x3) e-x** | 0.4 | 1.4 | 1 | 3 | 0.25 |
| **28** | **f(x) = – 10 sin(x3) cos(– x)** | -1.4 | -0.4 | 2 | 1 | 0.25 |
| **29** | **f(x) = x2cos(x + 3) – 4** | 3 | 4 | 3 | 1 | 0.25 |
| **30** | **f(x) = – cos(x – 5) e2x / 3** | 1 | 3 | 1 | 3 | 0.5 |

#### 

#### 3.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание.
2. В сценарии пакета Scilab создать функции для проведения расчета двумя заданными методами интегралов с шагом  и  ( и ) и значения погрешностей по правилу **Рунге**.
3. Результаты решения, полученные с помощью математического пакета Scilab. Оценить погрешность ручных расчетов

#### 3.5. Пример выполнения задания

1. **Задания для численного интегрирования:**

*  – подынтегральная функция;
* **a=1, b=3**–пределы интегрирования;
* методы интегрирования для выполнения п.**2** – средних прямоугольников, трапеций, Симпсона;
* методы интегрирования для выполнения п.**5** – средних прямоугольников, трапеций, Симпсона;
* начальный шаг интегрирования **h0=1.**

1. **Вычисление интегралов с шагом  и  ( и ) и оценка его погрешности по правилу Рунге**

Правило Рунге применяют для вычисления погрешности путём двойного просчёта интеграла с шагами **h/2** и **h,**при этом погрешность вычисляется по формуле .

Полагают, что интеграл вычислен с точностью **Е**, если **** тогда , где **** – уточненное значение интеграла, **p** – порядок метода.

Вычислим интеграл по формуле

* **средних прямоугольников** и оценим погрешность интегрирования методом двойного просчёта:







* **трапеций** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:





* **Симпсона** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:

 где 







##### 3.6. Вычисление определенных интегралов в Scilab

|  |
| --- |
| --> deff('y=f(x)','y=log(x)');--> a=1;b=3;--> [s,ir]=intg(a,b,f)ir =1.439D-14s =1.2958369 |

##### Контрольные вопросы по теме «Численное интегрирование»

1. Что такое шаг интегрирования?
2. Каким образом связана задача численного интегрирования и интерполяция?
3. Какое влияние оказывает уменьшение числа разбиений на отрезке [a;b] на погрешность интегрирования?
4. Каким образом вычисляется определенный интеграл в случае, если подынтегральная функция задана таблицей с переменным шагом?
5. Какой из изученных вами методов численного интегрирования обладает высшей степенью точности?
6. Зависит ли точность численного интегрирования от величины шага интегрирования?
7. Для чего предназначен метод двойного просчета?
8. Что представляет собой формула для вычисления элементарного интеграла по формуле трапеций?
9. Что представляет собой формула для вычисления элементарного интеграла по формуле Симпсона?
10. Интерполяционным многочленом, какой степени заменяется подынтегральная функция в методе прямоугольников?
11. Интерполяционным многочленом, какой степени заменяется подынтегральная функция в методе трапеций?
12. В каком методе для вычисления интеграла необходимо выбирать количество интервалов разбиения кратное двум?
13. Какой метод позволяет обеспечить вычисление интеграла с заданной точностью?
14. Какой метод численного интегрирования даст наиболее точный результат, если подынтегральная функция имеет вид y = 5x3?
15. В каком методе численного интегрирования подынтегральная функция заменяется квадратичным полиномом?
16. Какой метод численного интегрирования даст точный результат, если подынтегральная функция имеет вид f(x) = x2?
17. Какой метод интегрирования наилучшим образом подходит для вычисления интеграла линейной функции?
18. Обеспечивают ли методы трапеций и метод средних прямоугольников точность одного порядка?
19. Какой из известных вам методов интегрирования обладает наименьшей точностью?
20. Сколько шагов интегрирования содержит элементарный отрезок интегрирования в методе Симпсона?

## Лабораторная работа по теме №4

## «Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений»

### 4.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши.
2. Методы Рунге-Кутты различных порядков, общие свойства.
3. Погрешности методов.
4. Выбор шага интегрирования.
5. Графическая иллюстрация методов Рунге-Кутты.

### 4.2. Задание

1. **Выбрать индивидуальное задание** в табл. 4-1 для решения обыкновенных дифференциальных уравнений**:**

* дифференциальное уравнение ;
* интервал [a;b] , где ищется решение дифференциального уравнения;
* начальные условия x0, y0;
* шаг интегрирования h0**.**

1. **Найти аналитическое решение** заданного дифференциального уравнения, полагая его точным.
2. **Создать в сценарии функцию для вычисления значений полученного решения** на отрезке [a;b] с шагомh0.
3. **Создать в сценарии функцию для вычисления значений численное решение дифференциального уравнения методом Эйлера** -  в точках отрезка [a;b] с шагом h0
4. **Вычислить значения погрешностей** для, ,.
5. **Создать в сценарии функцию для вычисления значений численное решение дифференциального уравнения методом Рунге**-**Кутта** 4-го порядка yрк(х) в точках отрезка [a;b] с шагом h0
6. **Вычислить значения погрешностей ** для, , .
7. **Найти решение дифференциального уравнения** ys(x)использованием функции пакета Scilab
8. **Проиллюстрировать решения**  и ys(x) в одном графическом окне.

### 4.3. Варианты задания

Таблица 4-1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№**  **вар** | **Уравнение** | **x0** | **y0** | **h0** | **a** | **b** |
| **1** | **y' = x y2** | **0** | **-2** | **0.5** | **0** | **1.5** |
| **2** | **y' = y2 (x2+ x + 1)** | **0** | **-2** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **3** | **y' = x3 y2** | **0** | **-2** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **4** | **y' = y / cos2(x)** | **0** | **1** | **0.25** | **0** | **0.75** |
| **5** | **y' = y cos(x)** | **0** | **1** | **0.5** | **0** | **1.5** |
| **6** | **y' = y2cos(x)** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **7** | **y' = x2 y + y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **8** | **y' = (x – 1)2 y2** | **0** | **-1** | **0.5** | **0** | **1.5** |
| **9** | **y' = x3 y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **10** | **y' = y2 sin(x)** | **0** | **0.5** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **11** | **y' = y sin(x)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **12** | **y' = x y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **13** | **y' = y2 / x** | **1** | **1** | **0.2** | **1** | **1.6** |
| **14** | **y' = x2 y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.5** |
| **15** | **y' = y2 (2 – x)** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **16** | **y' = 3 x2 y2** | **0** | **-4** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **17** | **y' = y2 (ex + 4x)** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **18** | **y' = y (x – 1)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **19** | **y' = x (1 + y2)** | **0** | **0** | **0.25** | **0** | **0.75** |
| **20** | **y' = x / (2y)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **21** | **y' = y / (3 x2)** | **1** | **1** | **0.2** | **1** | **1.6** |
| **22** | **y' = 4 x e-3y** | **1** | **0** | **0.2** | **1** | **1.6** |
| **23** | **y' = 2 x y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **24** | **y' = 2 x (y1/2)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **25** | **y' = y2 ex** | **0** | **-2** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **26** | **y' = x (1 – y2)1/2** | **0** | **0** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **27** | **y' = (1 + x) y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **0.6** |
| **28** | **y' = x2 (1 – y2)1/2** | **0** | **0** | **0.1** | **0** | **0.3** |
| **29** | **y' = (x2 + x) y2** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **1.2** |
| **30** | **y' = y2 / cos2(x)** | **0** | **-1** | **0.3** | **0** | **1.5** |

### 4.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание.
2. Решение ОДУ аналитическим методом.
3. Создать в сценарии функцию для вычисления решения y(x) на отрезке [a;b] с шагом , и записать его в табл. 5-2.
4. Создать в сценарии функцию для вычисления решения ОДУ методом Эйлера -  в точках отрезка [a;b] с шагом h0**,** и записанные в табл. 1.5-2.
5. Вычислить значения погрешностей для, , , записать в табл. 5-2.
6. Создать в сценарии функцию для вычисления решения ОДУ методом Рунге-Кутта 4-го порядка  с шагом h0 и записать его табл. 5-2
7. Вычислить значения погрешностей, , и записать их в табл. 5-2.
8. Решить ОДУ, с использованием функции пакета Scilab ode, и записать его в табл. 5-2.
9. Построить графии решений, полученных с использованием аналитического метода, метода Эйлера, метода Рунге-Кутта.

Все решения в итоге должны быть оформлены в виде табл. результатов 4-2.

Таблица 4-2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **xi** |  |  |  |  |  | ys(xi) |
| … | … |  |  |  |  |  |

### 4.5. Пример выполнения задания

1. **Задание для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений:**

* дифференциальное уравнение ;
* интервал [0;0.4];
* начальные условия x0=0, y0=1;
* шаг интегрирования h0=0.1.

1. **Точное аналитическое решение заданного дифференциального уравнения**

Найдем точное аналитическое решение заданного дифференциального уравнения (решение y=y(x))методом разделения переменных. Для этого запишем уравнение в виде  и проинтегрируем с учетом начальных условий. Получим . Из начальных условий следует, что с=0.

Аналитическое решение дифференциального уравнения .

1. **Значения точного решения ОДУ –y(x)**

Вычислим в сценарии значения полученного решения **y(xi)** на отрезке [0;0.4] с шагом изменения аргумента h=0.1:

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** | **y(xi)** |
| 0 | 1 |
| 0.1 | 1.1051711 |
| 0.2 | 1.2214026 |
| 0.3 | 1.3498585 |
| 0.4 | 1.4918243 |

1. **Численное решение заданного ОДУ методом Эйлера**

Вычислим в сценарии значения численного решение ОДУ методом Эйлера () в точках отрезка [0;0.4] с шагом h=0.1. Для этого ОДУ записывают в виде y’=f(x,y) . Общая формула для определения очередного значения функции по методу Эйлера имеет вид yi+1=yi+h⋅f(xi,yi), где , :

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** |  |
| 0 | 1 |
| 0.1 | 1.1000 |
| 0.2 | 1.210000 |
| 0.3 | 1.331000 |
| 0.4 | 1.4641001 |

1. **Значения погрешностей**

Вычислим в сценарии значения погрешностей для, ,:

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** | **Ei** |
| 0 |  |
| 0.1 | 0.005171 |
| 0.2 | 0.011403 |
| 0.3 | 0.018858 |
| 0.4 | 0.027724 |

1. **Численное решение ОДУ методом Рунге-Кутта 4-го порядка**

Вычислим в сценарии значения численного решения ОДУ и получим решение в точках отрезка [0;0.4]с шагом h=0.1 () методом Рунге-Кутта 4-го порядка, используя формулы:



|  |  |
| --- | --- |
| **xi** |  |
| 0 | 1 |
| 0.1 | 1.105171 |
| 0.2 | 1.221403 |
| 0.3 | 1.349859 |
| 0.4 | 1.491825 |

1. **Значения погрешностей**

Вычислим в сценарии значения погрешностей , 

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** |  |
| 0 | 0 |
| 0.1 | 0.0000001 |
| 0.2 | 0.0000004 |
| 0.3 | 0.0000005 |
| 0.4 | 0.0000007 |

Все решения, полученные выше, сведем в табл. результатов 4-2:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **xi** | **y(xi)** |  | **Ei** |  |  | ys(xi) |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0.1 | 1.1051711 | 1.1000 | 0.005171 | 1.105171 | 0.0000001 | 1.1051711 |
| 0.2 | 1.2214026 | 1.210000 | 0.011403 | 1.221403 | 0.0000004 | 1.2214026 |
| 0.3 | 1.3498585 | 1.331000 | 0.018858 | 1.349859 | 0.0000005 | 1.3498585 |
| 0.4 | 1.4918243 | 1.4641001 | 0.027724 | 1.491825 | 0.0000007 | 1.4918243 |

– аналитическое решение ОДУ,

 - решение ОДУ, полученное методом Эйлера, ,

- решение ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка, .

1. **Решение ОДУ с использованием функции ode пакета Scilab**

|  |
| --- |
| --> //Решение ОДУ y'=y  --> y0=1; t0=0; t=0:0.1:0.4;  --> function yd=f(t,y)  > yd=y  > endfunction  --> z=ode(y,t0,t,f);  --> zz=[t;z]; zz' //таблица решения ОДУ функций ode  ans =  0. 1.  0.1 1.1051709  0.2 1.2214027  0.3 1.3498588  0.4 1.4918248  --> y1=[1 1.1 1.21 1.331 1.4641]; // решение ОДУ методом Эйлера  --> y4=[1 1.105 1.2214 1.349859 1.4918]; //решение ОДУ методом Рунге-Кутта 4-го порядка  --> plot(x,z,'k-o',x,y1,'r-',x,y4,'b-\*')  --> xtitle('Решение ОДУ','x','y(x),y1(x),y4(x)');  --> xgrid();  --> legend('y(x)','y1(x)','y4(x)'); |

### 

**Вывод**: В данном примере значения решений ОДУ методами Рунге-Кутта 4-го порядка и методом, заложенном в функции ode, практически совпадают. В решении ОДУ методом Эйлера, по мере удаления от начальной точки, погрешность накапливается за счет допущений, принятых в методе.

### Контрольные вопросы по теме Методы решения дифференциальных уравнений

1. Что такое обыкновенное дифференциальное уравнение?
2. Что такое порядок ОДУ?
3. Что называется аналитическим решением ОДУ 1-го порядка?
4. Что является общим решением ОДУ?
5. Что является геометрической интерпретацией общего решения ОДУ?
6. Что является численным решением ОДУ?
7. Что относится к начальным условиям при решении ОДУ 1-го порядка численными методами?
8. По какому правилу проводят оценку погрешности решения методов Рунге-Кутты?
9. Как выглядит формула для определения очередного значения функции по методу Рунге-Кутты 1-го порядка?
10. Уменьшение шага интегрирования при использовании методов Рунге-Кутты приводит к уменьшению или увеличению погрешности?
11. В обыкновенном дифференциальном уравнении присутствуют производные разных порядков от одной переменной или только первая производная от нескольких переменных?
12. Методы Рунге-Кутты являются одношаговыми или многошаговыми методами?
13. Сколько раз на каждом шаге необходимо вычислять  в модифицированном методе Эйлера?
14. Очередная точка решения **ОДУ** методом Рунге-Кутты вычисляется на основании одного или двух предыдущих значений функции?
15. Возможно ли в методах Рунге-Кутты применение переменного шага интегрирования?
16. Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием или дифференцированием?
17. Каковы формулы оценки погрешности методов Рунге-Кутты?
18. Почему метод Эйлера называют методом Рунге-Кутты первого порядка?
19. С помощью чего при оценке погрешности метода автоматического выбора шага учитывается порядок используемого метода Рунге-Кутты?
20. Можно ли оценить погрешность решения ОДУ**,** не зная точного решения?

## Лабораторная работа по теме №5

## «Одномерная оптимизация»

### 5.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. **Постановка** задачи одномерной оптимизации.

Методы оптимизации: метод дихотомии; метод золотого сечения.

1. Условия сходимости методов.
2. Оценка погрешности оптимизации.
3. Графическая иллюстрация процесса оптимизации.
4. Сравнение методов по точности, эффективности деления отрезка унимодальности, по числу итераций, по числу отсчетов исследуемой функции.

### 5.2. Задание

1. **Выбрать индивидуальное задание** по номеру варианта из табл. 5-1 для решения задачи одномерной оптимизации:

* функцию f(x),минимум которой необходимо найти;

1. **Провести исследование индивидуального варианта задания:**

* построить график функции**;**
* выбрать начальный отрезок неопределенности (отрезок, содержащий точку минимума);
* проверить выполнение аналитического условия унимодальности функции на выбранном отрезке.

1. **Создать в сценарии функцию для проведения значений 3-х итераций методом дихотомии и определить длину отрезка,** содержащего точку минимума, после трех итераций.
2. **Создать в сценарии функцию для проведения значений 3-х итераций методом золотого сечения и определить длину отрезка,** содержащего точку минимума, после трех итераций.
3. **Вычислить число итераций,** необходимых, чтобы локализовать точку минимума с

точностью E1 = 10-4 методами дихотомии и золотого сечения.

1. **Решить задачу оптимизации с**  использованием функции **optim** пакета Scilab.

### 5.3. Варианты задания

Таблица .5-1

|  |  |
| --- | --- |
| **№**  **вар.** | **Целевая функция** |
| **1** | **f(x) = – 2 (1 + x) e–x – 2 cos(x)** |
| **2** | **f(x) = (x – 1)** |
| **3** | **f(x) = 10 sin(x3) cos(-x)** |
| **4** | **f(x) = x2cos(x + 3) – 4** |
| **5** | **f(x) = cos(x – 5) e2x / 3** |
| **6** | **f(x) = – 4 sin(x) + x1 / 2** |
| **7** | **f(x) = – 5 sin3(x) – cos3(x)** |
| **8** | **f(x) = – cos(2x + 1) ln(2 / x) + 3** |
| **9** | **f(x) = x sin(x + 1) – cos(x – 5)** |
| **10** | **f(x) = (1 + x2)1 / 2 + e–x** |
| **11** | **f(x) = – 8 sin(- x3) e–x** |
| **12** | **f(x) = 5 e–x + 4 x + x3 / 3** |
| **13** | **f(x) = sin(x – 1) – x cos(x + 3)** |
| **14** | **f(x) = 3 cos(x2) / ln(x + 5)** |
| **15** | **f(x) = sin(x2) + 1 / (2 – x)** |
| **16** | **f(x) = sin(ex) – e–x + 1** |
| **17** | **f(x) = sin(x + 1) e2 / x** |
| **18** | **f(x) = – 5 x sin(x + 1) + 2 cos(x)** |
| **19** | **f(x) = 1 + sin(4x) / ln(x)** |
| **20** | **f(x) = 2 sin(4x) ln(– x) – 3** |
| **21** | **f(x) = x3 / 2 – 2 x sin(x)** |
| **22** | **f(x) = x sin(x) + cos(x) + 5** |
| **23** | **f(x) = e–x sin(2x)** |
| **24** | **f(x) = sin(2x) – 2 sin(x)** |
| **25** | **f(x) = sin(2x) – x** |
| **26** | **f(x) = cos(– 2x) e–x** |
| **27** | **f(x) = e–x sin(– 2x)** |
| **28** | **f(x) = e–xcos(– 2x)** |
| **29** | **f(x) = cos(x + 2) + cos(2x) + x** |
| **30** | **f(x) = cos(2x) + 2 sin(x)** |

.

### Содержание отчета

1. Индивидуальное задание.
2. Результаты исследования индивидуального варианта задания:

* график функции;
* начальный отрезок неопределенности;
* результаты проверки аналитического условия унимодальности функции на отрезке.

1. Результаты расчета трех итераций методом дихотомии представить в табл. 5.2.

Таблица 5-2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ итерации** | **a** | **b** | **x1** | **x2** | **f(x1)** | **f(x2)** |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |

1. Результаты расчета трех итераций методом золотого сечения представить в табл. 5.3.

Таблица 5-3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ итерации** | **a** | **b** | **x1** | **x2** | **f(x1)** | **f(x2)** |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |

1. Число итераций, необходимых для локализации точки минимума используемыми методами.
2. Решение задачи оптимизации с использованием функции пакета Scilab **optim**

### 

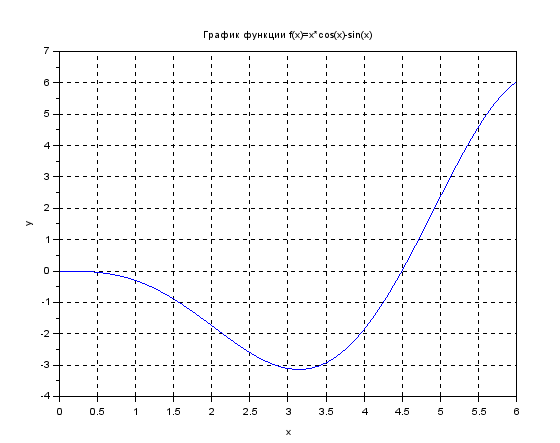
### Пример выполнения контрольного задания

1. **Задание для решения задачи одномерной оптимизации:**

* функция, для которой необходимо найти минимум – ;

1. **Исследование задания:**

* график функции , построенный на достаточно большом отрезке ОДЗ функции:



* выберем по построенному графику функции начальный отрезок неопределенности (отрезок, содержащий точку минимума): отрезок [2.5;3.5];
* проверим выполнение аналитического условия унимодальности функции на выбранном отрезке:

;

 при , так как sin(x) и cos(x) не

обращаются в нуль одновременно и .

Значениясведем в следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **х** | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 3.0 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 3.4 | 3.5 |
| **f’(x)** | -1.44 | -1.34 | -1.15 | -0.94 | -0.69 | -0.42 | -0.13 | 0.19 | 0.52 | 0.87 | 1.23 |

На отрезке [2.5;3.5**]** функция  монотонно возрастает, следовательно, функция

f(x) - на выбранном отрезке унимодальна.

### Метод золотого сечения

**3. Результаты выполнения функции, реализующей метод золотого сечения и длина отрезка, содержащего точку минимума после трех итераций**

Для проведения расчетов по методу золотого сечения следует создать сценарий и выполнить расчеты 3-х итераций. Ниже приведен пример 1-й итерации:

1). 





Вычислить аналогично следующие 2 итерации, а результаты расчетов свести в таблицу 5.2:

Таблица 5-2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | **a** | **b** | **x1** | **x2** | **f(x1)** | **f(x2)** |  |
| 0 | 2.5 | 3.5 | 2.88197 | 3.11803 | -3.04210 | -3.14073 | 0.61803 |
| 1 | 2.88197 | 3.5 | 3.11803 | 3.26393 | -3.14073 | -3.11750 | 0.38197 |
| 2 | 2.88197 | 3.26393 | 3.02786 | 3.11803 | -3.12179 | -3.14073 | 0.23607 |
| 3 | 3.02786 | 3.26393 |  |  |  |  |  |

Для метода золотого сечения теоретическая длина отрезка неопределенности после трех итераций равна , что совпадает с полученной длиной отрезка неопределенности.

1. **Число итераций, необходимых для локализации точки минимума и Е=10-4**

Теоретическая величина погрешности для метода золотого сечения определяется длиной конечного отрезка неопределенности после **N**итераций . Отсюда имеем ,  (L20=0.000066034).

Длина отрезка равна **0.00011**при расчете на **ПК**(N=19**)** . Точность достигнута при N=20. То есть, расчет совпадает с теоретической оценкой.

### Метод дихотомии

**3. Результаты выполнения функции, реализующей метод золотого сечения и длина отрезка, содержащего точку минимума после трех итераций.** Значение параметра метода дихотомии выберем равным: d=0.01**.**

Для проведения расчетов по методу дихотомии следует создать сценарий и выполнить расчеты 3-х итераций. Ниже приведен пример 1-й итерации:

1). 





Вычислить аналогично следующие 2 итерации, а результаты расчетов свести в табл. 5.3:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **a** | **b** | **х1** | **х2** | **f(x1)** | **f(x2)** |  |
| 1 | 2.5 | 3.5 | 2.995 | 3.005 | -3.109 | -3.113 | 0.505 |
| 2 | 2.995 | 3.5 | 3.2425 | 3.2525 | -3.125 | -3.122 | 0.2575 |
| 3 | 2.995 | 3.2525 | 3.119 | 3.129 | -3.1407 | -3.141 | 0.134 |
| 4 | 3.119 | 3.2525 |  |  |  |  |  |

Для метода дихотомии длина отрезка неопределенности после трех итераций равна



1. **Число итераций, необходимых для локализации точки минимума и Е=10-4**

Теоретическая величина погрешности для метода дихотомии определяется длиной конечного отрезка неопределенности после N итераций: . Отсюда, принимая во внимание, что , можно определить соответствующее число итераций: .

Если точностьЕ=0.0001, а параметр метода d==0.00002, то получим: .

В результате расчета на **ПК** при N=13 длина отрезка равна 0.00014**.** Точность достигнута при N=14,т. е. расчет совпадает с теоретической оценкой.

### Решение задачи оптимизации с использованием средств пакета Scilab

|  |
| --- |
| --> x=2.5:0.1:3.5;  --> y=x.\*cos(x)-sin(x);  --> plot(x,y)  --> xtitle('График функции f(x)=x\*cos(x)-sin(x)','x','y');  --> xgrid();    --> deff('y=f0(x)','y=x\*cos(x)-sin(x)'); //Описание целевой функции  --> function [f,g,ind]=costf(x,ind)  > f=f0(x)  > g=numderivative(f0,x)  > endfunction  --> x0=2.5;  --> [fmin,xmin]=optim(costf,x0)  xmin =  3.1415927  fmin =  -3.1415927 |

### Контрольные вопросы по теме

### «Одномерная оптимизация»

1. Какое значение функции называют оптимальным?
2. Какой минимум называют локальным?
3. Какой минимум называют глобальный?
4. Каковы необходимые и достаточные условия экстремума функции?
5. Когда применяются численные методы одномерной оптимизации?
6. В чем суть методов одномерного поиска?
7. Что означает понятие «унимодальная функция»?
8. Почему в методах одномерной оптимизации при переходе к следующей итерации часть отрезка можно отбросить?
9. Что влияет на значение параметра метода дихотомии?
10. Какое деление отрезка называют золотым сечением?
11. Влияет ли вид функции на скорость сходимости метода дихотомии?
12. Влияет ли вид функции на скорость сходимости метода золотого сечения?
13. В чем заключается основное достоинство метода золотого сечения?
14. Во сколько раз на очередной итерации уменьшается длина отрезка неопределенности в методе дихотомии?
15. Во сколько раз на очередной итерации уменьшается длина отрезка неопределенности в методе золотого сечения?
16. Как оценивается погрешность методов оптимизации?
17. Можно ли с использованием численных методов одномерной оптимизации найти максимум функции?

## Лабораторная работа по теме №6

## «Методы многомерной оптимизации»

### 6.1. Вопросы, подлежащие изучению

1. Постановка задачи многомерной оптимизации.
2. Классификация задачи оптимизации.
3. Основные понятия: выпуклое множество, целевая функция, линии уровня, поверхности уровня, градиент скалярной функции и его свойства, локальный и глобальный минимум, выпуклая функция, условия существования минимума функции нескольких переменных.
4. Градиентные методы и алгоритмы оптимизации: метод с дроблением шага;метод наискорейшего спуска аналитический; метод наискорейшего спуска численный.
5. Основные свойства градиентных методов оптимизации, различия методов.
6. Начальная точка траектории поиска минимума, свойства траектории, условия окончания процесса оптимизации.
7. Решение задачи многомерной оптимизации средствами пакета Scilab.

### 6.2. Задание

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл. 6-1 для решения задачи оптимизации функции двух переменных:

* Функцию – f(x, y);

1. **Проверить условия существования точки минимума** заданной функции f(x,y).
2. **Решить задачу многомерной оптимизации аналитическим методом**.
3. **Выбрать начальную точку** x0, y0 итерационного процесса оптимизации.
4. **Создать сценарий и провести расчет 3-х итераций методом НСА,** результаты расчета свести в табл. 6-2.
5. **Создать сценарий и провести расчет 3-х итераций методом ГДШ,** результаты расчета свести в табл. 6-3.
6. **По результатам расчетов построить в одном графическом окне 2 траектории спуска (НСА и ГДШ),** используя полученные данные 3-х итераций**, сделать вывод** о правильности проведенного расчета**.**
7. **Решить задачу многомерной оптимизации** с использованием функции optim пакета Scilab**, сравнить полученные координаты точки минимума с координатами, полученными аналитическим методом. Сделать вывод.**

### 6.3. Варианты задания

Таблица 6-1

|  |  |
| --- | --- |
| **№** | **Целевая функция** |
| 1 | f(x,y) = 2 x2 + 3 y2 – 5 x + 6 |
| 2 | f(x,y) = x2 + 2 y2 – 3 y + 7 |
| 3 | f(x,y) = 3 x2 + y2 – 15 |
| 4 | f(x,y) = 3 x2 + 5 y2 + x – 2 |
| 5 | f(x,y) = 2 x2 + 3 y2 + 2 x – 3 y |
| 6 | f(x,y) = 5 x2 + 2 y2 + 3 x + 10 |
| 7 | f(x,y) = 4 x2 + 3 y2 – 3 y – 7 |
| 8 | f(x,y) = 5 x2 + 6 y2 + 3 x – 2 y + 3 |
| 9 | f(x,y) = 3 x2 + y2 + - 3 x + y – 2 |
| 10 | f(x,y) = 6 x2 + 5 y2 – 10 |
| 11 | f(x,y) = 5 x2 + 2 y2 – 2 x |
| 12 | f(x,y) = x2 + 2 y2 – 3 x + 5 y + 1 |
| 13 | f(x,y) = x2 + 4 y2 – 2 x |
| 14 | f(x,y) = 4 x2 + 3 y2 + y + 3 |
| 15 | f(x,y) = 3 x2 + y2 + 3 |
| 16 | f(x,y) = 6 x2 + 4 y2 – 5 x + 3 y –13 |
| 17 | f(x,y) = 5 x2 + y2 + x |
| 18 | f(x,y) = x2 + 4 y2 – 2 x + 3 y + 5 |
| 19 | f(x,y) = 2 x2 + 5 y2 + 2 y + 3 |
| 20 | f(x,y) = x2 + 3 y2 – x + 2 y + 7 |
| 21 | f(x,y) = 3 x2 + y2 – y + 3 |
| 22 | f(x,y) = 6 x2 + 3 y2 + 10 |
| 23 | f(x,y) = 5 x2 + 4 y2 – 4 x – 11 |
| 24 | f(x,y) = x2 + 2 y2 – x – y |
| 25 | f(x,y) = 3 x2 + 2 y2 – 5 y + 1 |
| 26 | f(x,y) = 3 x2 + 4 y2 – 2 x + 3 y – 5 |
| 27 | f(x,y) = 4 x2 + 5 y2 + 2 x – 4 y + 12 |
| 28 | f(x,y) = 6 x2 + 3 y2 – 4 x + 17 |
| 29 | f(x,y) = x2 + 5 y2 – x + 2 y + 10 |
| 30 | f(x,y) = 3 x2 + y2 – 10 |

### 6.4. Содержание отчета

1. Индивидуальное задание, целевая функция , метод для ручного расчета 3-х итераций и метод для программного расчета с заданной точностью.
2. Результаты проверки условия существования точки минимума функции f(x,y).
3. Аналитическое решение задачи оптимизации.
4. Выбор начальной точки численного процесса оптимизации.
5. Результаты решения задачи оптимизации выбранными методами методом ГДШ (3 итерации), представленные в табл. 6-2.

Таблица 6-2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **x** | **y** |  |  |  |  |
| 0 |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |

1. Результаты решения задачи оптимизации выбранными методами методом НСА (3 итерации), представленные в табл. 6-3.

Таблица 6-3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **x** | **y** |  |  |  |  |
| 0 |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |

1. График 2-х траекторий спуска к точке минимума.
2. Результаты выполнения задания, полученные с помощью математического пакета Scilab.

### 6.5. Пример выполнения задания

1. **Задание для решения задачи многомерной оптимизации:**

* функция – ;
* метод оптимизации для «ручного расчета» - значение параметра **p=3**;
* метод оптимизации для расчета на ПК – значение параметра t=1.

1. **Проверка существования минимума функции**

Известно, что всякий глобальный минимум выпуклой функции является одновременно и локальным.

Проверить, что функция  является выпуклой на множестве R.

Матрица Гессе для функции :

,

а угловые миноры:

.

Таким образом, функция  - выпуклая на множестве R**.**

1. **Решение задачи многомерной оптимизации аналитическим методом**

Необходимые условия существования точки экстремума:

 откуда.

1. **Начальная точка итерационного процесса численного решения задачи многомерной оптимизации**

Выбрать начальную точку - .

1. **Пример выполнения 1-й итерации методом наискорейшего спуска (НСА):**

Вывод формулы для расчета шага спуска:

 где

Построим функцию

,



Из условия определим параметр :

, k=0, 1,…

**Пример выполнения 1-й итерации по методу НСА:**

1. 



**Аналогично выполнить еще 2 итерации, полученные результаты свести в таблицу:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **x** | **y** |  |  |  | **k** |
| 0 | 1 | 0.5 | 27.75 | **2** | **3** | 0.2097 |
| 1 | 0.5806 | -0.1290 | 26.3871 | 1.1613 | -0.7742 | 0.3095 |
| 2 | 0.2212 | 0.1105 | 26.0857 | 0.4424 | 0.66359 | 0.2097 |
| 3 | 0.1284 | -0.0285 | 26.0189 |  |  |  |

После 3-х итераций: Xmin=0.1284, ymin=-0.0285, f=21.0189**.**

1. **Пример выполнение 1-й итерации методом методом градиентного спуска с дроблением шага (ГДШ):**





1) λ=0.5; λ0 =λ



Проверим условие ГДШ:









*да*



**Аналогично выполнить еще 2 итерации, полученные результаты свести в таблицу**:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **k** | **x** | **y** |  |  |  | **k** |
| 0 | 1 | 0.5 | 27.75 | 2 | 3 | 0.125 |
| 1 | 0.75 | 0.125 | 26.75 | 1.5 | 0.75 | 0.25 |
| 2 | 0.375 | -0.0625 | 26.1523 | 0.75 | -0.375 | 0.25 |
| 3 | 0.1875 | 0.0313 | 26.0318 |  |  |  |

После 3-х итераций: Xmin=0.1875, ymin=0.0313, f=26.0318**.**

1. **Построение траектории поиска минимума методами НСА и ГДШ.**

|  |
| --- |
| **--> x1=[1,0.5806,0.2212,0.1284];, y1=[0.5,-0.129,0.1105,-0.0285];**  **--> x2=[1,0.75,0.375,0.1875]; , y2=[0.5,0.125,-0.0625,0.0313];**  **--> scf(1); plot(x1,y1,'r-o',x2,y2,'b-o');**  **--> xtitle('Траектории спуска НСА и ГДШ');**  **--> xgrid**  **--> legend('- НСА', '- ГДШ',1)** |

|  |
| --- |
| **--> //Описание целевой функции**  **--> function y=gg(x)**  **> y=x(1).^2+3\*x(2).^2+26**  **> endfunction**  **--> function [f,g,ind]=cst(x,ind) //вспомогательная функция**  **> f=gg(x);**  **> g=numderivative(gg,x);**  **> endfunction**  **--> x0=[1,1];**  **--> [f,xopt]=optim(cst,x0) //вычисление координат точки минимума** xopt =-0.0000004 7.970D-08f =26. |

**Вывод:** Координаты точки минимума, найденные аналитическим методом и методом, заложенным в функции **optim** пакета Scilab, совпадают с точностью 7.970D-08.

### Контрольные вопросы по теме

### «Многомерная оптимизация»

1. На какие задачи делится задача оптимизации в зависимости от количества

параметров целевой функции?

1. Какая функция называется целевой функцией?
2. Как называется задача оптимизации, если на значения параметров оптимизации существуют ограничения?
3. Что такое градиент?
4. Куда направлен антиградиент?
5. Чему равен модуль антиградиента в точке минимума?
6. Что такое линия уровня?
7. Что такое траектория спуска?
8. Что является условием окончания итерационного процесса по отысканию точки минимума в методах спуска?
9. Что является условием существования минимума для функции от двух переменных?
10. Как выбирается начальная точка при решении задачи многомерной оптимизации?
11. С каким направлением в градиентных методах совпадает движение к точке минимума?
12. Что является достаточным условием существования минимума функции нескольких переменных?
13. Какая точка называется точкой стационарности **?
14. Что показывает модуль градиента?
15. Какое значение в методе ГДШ принимается за начальное значение шага ?
16. Как осуществляется поиск очередной точки траектории спуска в методе наискорейшего спуска?
17. Что нужно сделать, чтобы с использованием метода наискорейшего спуска найти максимум функции f(x1, x2)?
18. Для чего используется метод одномерной оптимизации в численном методе наискорейшего спуска (НСЧ)?
19. Как называется множество точек, для которых целевая функция принимает постоянное значение?

# Список литературы

1. Семенова Т.И., Кравченко О.М., Шакин В.Н., Вычислительные модели и алгоритмы решения задач численными методами: учебное пособие. -М.:ЭБС МТУСИ, 2017.- 82с. Режим доступа: <http://www.mtuci.ru/structure/library/catalogue/download.php?book_id=1819>.
2. Семенова Т.И., Юсков И.О., Юскова И.Б. Алгоритмизация вычислительных задач, [Электронный ресурс] / МТУСИ. – М., 2017. – 62с. Режим доступа: <http://www.mtuci.ru/structure/library/catalogue/download.php?book_id=1833>.
3. Шакин В. Н., Семенова Т. И., Фриск В. В. Базовые средства математического пакета Scilab. Учебник для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2019 – 336 с.: ил.

# Содержание

1. Общие рекомендации по использованию лабораторного практикума…………………………………………………………..……………...……3
2. [Тема 1. Методы решения нелинейных уравнений](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355350#_Toc57355350)………………………………...… 4
3. Тема [2. Интерполяция функций](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355373#_Toc57355373)…………………………………………………..….. 12
4. [Тема 3. Численное интегрирование](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355391#_Toc57355391)………………………………………………..…. 21
5. Тема [4. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355408#_Toc57355408)…...........25
6. Тема [5. Одномерная оптимизация](file:///H:\ЧислМетодыЗаоч\Информатика2003-17.doc#_Toc57355423#_Toc57355423)……………………………………………………..31
7. Тема 6. Методы оптимизации функций нескольких переменных………....………37

Список литературы........................................................................................................ 43